Strutture di Hodge miste su varietà algebriche non singolari

Emanuele Pavia

21 luglio 2019

Sommario

La coomologia $\mathrm{H}^n(X, \mathbb{C})$ di una varietà complessa di Kähler X, liscia e propria, è dotata naturalmente di una struttura di Hodge di peso n.

$$\mathrm{H}^n(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^{p,q}$$

dove $\mathrm{H}^{p,q}$ è uno spazio vettoriale complesso per ogni intero p e q che soddisfa la relazione $\mathrm{H}^{p,q} \cong \overline{\mathrm{H}^{q,p}}$. In questo elaborato, seguendo i fondamentali lavori di Deligne ([Del71] e [Del74]) e la trattazione più recente di Peters e Steenbrink ([PS08]), mostrerò che la coomologia complessa di una varietà algebrica non singolare, senza più l'ipotesi di compattezza, è dotata di una struttura più generale che può essere pensata come una sequenza di "estensioni successive" di strutture di Hodge con pesi decrescenti, detta *struttura di Hodge mista*.

Indice

1 Richiamo su strutture di Hodge pure **1**

2 Strutture di Hodge miste **3**

3 Teoria di Hodge mista su varietà algebriche lisce **4**

1 Richiamo su strutture di Hodge pure

Definizione 1.1. Una *struttura di Hodge reale* è uno spazio vettoriale finito dimensionale $H_{\mathbb{R}}$ dotato di una bigradazione $H^{p,q}$ dello spazio vettoriale complesso $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ che verifica $H^{p,q} \cong \overline{H^{q,p}}$.
Diciamo che una struttura di Hodge reale *ha peso* n se i numeri di Hodge $h^{p,q} = \dim(H^{p,q})$ sono nulli per ogni coppia $p + q \neq n$.

Osservazione 1.2. Dare una bigradazione nel senso della Definizione 1.1 è equivalente a dare un'azione del gruppo $\mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}((\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}})$, dove $\mathbb{G}_m$ è il gruppo moltiplicativo complesso e $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ è il funtore di restrizione degli scalari secondo Weil. Il gruppo algebrico $\mathbb{S}$ è determinato dal gruppo abeliano libero $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_m)$ dei suoi caratteri complessi, con azione del gruppo di Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, ed è quindi generato dall'omomorfismo identità $z \mapsto z$ e dall'omomorfismo di coniugio $z \mapsto \overline{z}$. L'azione di $\mathbb{S}$ su $H^{p,q}$ è data dalla moltiplicazione per $z^p \cdot \overline{z}^q$.

La Definizione 1.1 si estende in maniera ovvia anche al caso di sottoanelli Noetheriani R di $\mathbb{C}$ tali che $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sia un campo, e a R-moduli finitamente generati H_R ([PS08, Sezione 3.1]). Pertanto, parleremo in generale di *strutture di Hodge*.
Il nostro caso di interesse sarà, naturalmente, quello in cui $R = \mathbb{Z}$ è l'usuale anello dei numeri interi.

Definizione 1.3. Una *struttura di Hodge pura di peso* n consiste di un dato $H := (H_{\mathbb{Z}}, F^{\bullet})$, dove:

1. $H_{\mathbb{Z}}$ è un gruppo abeliano libero finitamente generato.
2. $F^{\bullet}$ è una struttura di Hodge reale di peso n su $H_{\mathbb{R}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Osservazione 1.4. Nella Definizione 1.3, vi è un leggero abuso di notazione nella scelta di denotare la struttura di Hodge reale di peso n con $F^{\bullet}$. Stiamo infatti implicitamente identificando tale struttura di Hodge con la filtrazione $F^{\bullet}$ che essa induce naturalmente su $H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ nel modo seguente:

$$F^p(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{r \geq p} H^{r,n-r} \tag{1}$$

Tale filtrazione ha una proprietà aggiuntiva: data una filtrazione decrescente $F^{\bullet}$ su un R-modulo H_R (con R e H_R che godono delle proprietà descritte sopra), denotiamo con $\mathrm{Gr}^p_F(H_R)$ il quoziente $F^p H_R / F^{p+1} H_R$. Quando $R = \mathbb{C}$, data una filtrazione $F^{\bullet}$ abbiamo naturalmente una filtrazione coniugata definita come $\overline{F^p} H_{\mathbb{C}} = \overline{F^p H_{\mathbb{C}}}$. La filtrazione $F^{\bullet}$ della formula (1) è quindi tale che:

$$\mathrm{Gr}^p_F \mathrm{Gr}^q_{\overline{F}}(H_{\mathbb{C}}) \cong 0$$

per ogni $p + q \neq n$. (Nel linguaggio di [Del71], le due filtrazioni si dicono *n-opposte*.)

La Proposizione seguente esplicita la relazione tra filtrazioni decrescenti n-opposte alla propria filtrazione coniugata e strutture di Hodge.

Proposizione 1.5 ([Del71], Proposizioni 1.2.6 e 2.1.9)**.** *Vi è un'equivalenza di categorie tra la categoria delle filtrazioni n-opposte alla propria filtrazione coniugata su un gruppo abeliano libero finitamente generato $H_{\mathbb{Z}}$ e la categoria delle strutture di Hodge pure $H_{\mathbb{Z}}$ con filtrazione $H^{p,q}$ su $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.*

Cenno della dimostrazione: Data una filtrazione $F^{\bullet}$ che è n-opposta alla filtrazione $\overline{F^{\bullet}}$, proviamo innanzitutto che $F^p(H_{\mathbb{Z}}) \oplus \overline{F^{n+1-p}(H_{\mathbb{Z}})} \cong H_{\mathbb{Z}}$. Infatti, $\mathrm{Gr}^p_F \mathrm{Gr}^q_{\overline{F}}(\mathrm{H}^n(X, \mathbb{C})) \cong 0$ equivale a dire che per ogni $p+q > n$ l'intersezione $F^p(H_{\mathbb{Z}}) \cap \overline{F^q(H_{\mathbb{Z}})}$ è banale, e che per ogni $p+q \leq n+1$ la somma (non diretta a priori) $F^p(H_{\mathbb{Z}}) + \overline{F^q(H_{\mathbb{Z}})}$ è isomorfa a $H_{\mathbb{Z}}$. Mettendo assieme questi due risultati per $p+q = n+1$, abbiamo il nostro enunciato. Ora costruiamo quindi la filtrazione di Hodge ponendo:

$$H^{p,q} := \begin{cases} 0 & \text{se } p+q \neq n \\ F^p(H_{\mathbb{Z}}) \cap \overline{F^q(H_{\mathbb{Z}})} & \text{se } p+q = n \end{cases}$$

La costruzione del funtore nell'altro senso è invece data essenzialmente dalla filtrazione costruita nella formula (1).

□

Esempio 1.6. Sia X una $\mathbb{C}$-varietà algebrica di Kähler liscia e proiettiva[1]. Il lemma di Poincaré olomorfo implica che il morfismo di complessi $\mathbb{C}$-spazi vettoriali:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \Omega^{\bullet}_X$$

esibisce $\Omega^{\bullet}_X$ come una risoluzione iniettiva del fascio costante $\mathbb{C}$. In particolare:

$$\mathrm{H}^{\bullet}(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^{\bullet}(X, \Omega^{\bullet}_X)$$

Su $\mathbb{H}^{\bullet}(X, \Omega^{\bullet}_X)$ abbiamo una filtrazione ovvia data da $\mathrm{H}^{p,q} := \mathrm{H}^q(X, \Omega^p_X)$, che definisce quindi una sequenza spettrale descritta in pagina 1 da:

$$\mathrm{E}_1^{p,q} := \mathrm{H}^q(X, \Omega^p_X) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

Questa sequenza spettrale degenera già in pagina 1 ([Wei58]), per cui $\mathrm{E}_1^{p,q} \cong \mathrm{E}_{\infty}^{p,q}$, e perciò $\mathrm{H}^{p+q}(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p,q} \mathrm{H}^{p,q}$. In più, la filtrazione di Hodge $F^{\bullet}$ indotta dagli $\mathrm{H}^{p,q}$ è tale che:

$$\mathrm{Gr}^p_F \mathrm{Gr}^q_{\overline{F}}(\mathrm{H}^n(X, \mathbb{C})) \cong 0$$

per ogni $p+q \neq n$. L'esistenza della struttura di Hodge è quindi garantita dalla Proposizione 1.5.

[1] Basta in realtà propria: ci si riduce al caso proiettivo con una combinazione del lemma di Chow e del teorema di risoluzione di singolarità di Hironaka.

2 Strutture di Hodge miste

Se X non è più compatta oppure liscia, non potremmo in generale aspettarci un risultato come quello in Esempio 1.6.

Esempio 2.1. Sia X una curva liscia e propria di genere g definita su $\mathbb{C}$, e sia D un divisore di X avente come supporto gli n punti $p_1, \ldots, p_n$.
Allora $h^0(X) = 1$, $h^1(X) = 2g$, e $h^2(X) = 1$. Considerata però la varietà complessa (non più propria) $U = X \setminus D$, avremo che $h^1(U) = 2g + (n-1)$.
In particolare, la parità di $h^1(U)$ è stabilita dal numero n dei punti del supporto di D. Perciò, non potremo avere sempre una struttura di Hodge pura su $\mathrm{H}^n(U, \mathbb{C})$: infatti, se esistesse una tale struttura, avremmo che $\dim \mathrm{H}^{1,0}(U) = \dim \mathrm{H}^{0,1}(U)$ in quanto $\mathrm{H}^{0,1}(U) = \overline{\mathrm{H}^{1,0}(U)}$, e $\mathrm{H}^1(U, \mathbb{C}) \cong \mathrm{H}^{1,0}(U) \oplus \mathrm{H}^{0,1}(U)$, perciò la dimensione di $\dim \mathrm{H}^1(U, \mathbb{C})$ deve essere necessariamente pari.

Abbiamo bisogno quindi di una definizione più versatile delle strutture di Hodge pure.

Definizione 2.2 ([PS08], Definizione 3.1)**.** Una *struttura di Hodge mista* consiste di un dato $H := (H_\mathbb{Z}, W_\bullet, F^\bullet)$, dove:

1. $H_\mathbb{Z}$ è un gruppo abeliano libero finitamente generato (detto *reticolo intero*).

2. $W_\bullet$ è una filtrazione crescente su $H_\mathbb{Q} := H_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ (detta *filtrazione dei pesi*).

3. $F^\bullet$ è una filtrazione decrescente su $H_\mathbb{C} := H_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$ (detta *filtrazione di Hodge*).

Le filtrazioni $W_\bullet$, $F^\bullet$ e $\overline{F^\bullet}$ devono essere tali che, per ogni k, il $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale $\mathrm{Gr}_k^W(H_\mathbb{Q})$ sia una struttura di Hodge pura (su $\mathbb{Q}$) di peso k, con filtrazione di Hodge indotta dalla (restrizione della) filtrazione $F^\bullet$ su $H_\mathbb{Q} \subseteq H_\mathbb{C}$.

Osservazioni 2.3.

1. Nuovamente, per $\mathrm{Gr}_k^W(H)$, dove $W_\bullet$ è una filtrazione crescente su H, intendiamo il quoziente $W_k H / W_{k-1} H$.

2. Data una struttura di Hodge $H = (H_\mathbb{Z}, F^\bullet)$ di peso n, dato $H_\mathbb{Q} = H_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ e ponendo:
$$W_k(H_\mathbb{Q}) := \begin{cases} 0 & \text{se } k < n \\ H_\mathbb{Q} & \text{se } k \geq n \end{cases}$$
questa può essere considerata naturalmente come una struttura di Hodge mista.

Per una struttura di Hodge mista, i *numeri di Hodge* $h^{p,q}$ sono le dimensioni come $\mathbb{C}-$spazi vettoriali di $\mathrm{Gr}_{p+q}^W(H_\mathbb{C})^{p,q} := \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q \mathrm{Gr}_{p+q}^W(H_\mathbb{C})$.
Una struttura di Hodge mista è detta *di tipo S* (dove $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) se $h^{p,q} = 0$ per ogni coppia $(p, q) \notin S$.

3 Teoria di Hodge mista su varietà algebriche lisce

Ricordiamo la definizione di un divisore a intersezione normale.

Definizione 3.1. Data una varietà algebrica liscia X, un *divisore a intersezione normale* (*normal crossing divisor*) è un divisore Y se l'inclusione $Y \hookrightarrow X$ è localmente descritta tramite coordinate iperpiano. Più precisamente, Y è un divisore a intersezione normale se localmente intorno a ogni punto x di X, Y è tagliato da un ideale $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$ generato da una sequenza regolare $(z_1, \ldots, z_r)$ di $\mathfrak{m}_p$.

Osserviamo che un divisore Y può non essere liscio, ma è sicuramente dato dall'unione di componenti irriducibili lisce.

Assumiamo quindi $\overline{X}$ una varietà propria e liscia su $\mathbb{C}$ con $Y \subseteq \overline{X}$ divisore a intersezione normale, e sia X l'aperto liscio $\overline{X} \setminus Y$. Dobbiamo pensare a $\overline{X}$ come una *buona compattificazione* (cfr. [PS08, Definizione 4.1]) di X.

Definizione 3.2. Nelle ipotesi sopra, sia $j \colon X \hookrightarrow \overline{X}$. Definiamo il *fascio delle* 1*-forme differenziali con polo logaritmico in* Y come il sotto-$\mathscr{O}_{\overline{X}}$-modulo localmente libero di $j_*\Omega^1_X$ generato da $\Omega^1_{\overline{X}}$ e dai simboli della forma $\frac{\mathrm{d}z_j}{z_j}$, con z_j coordinate iperpiano che definiscono localmente una componente irriducibile di Y. Denotiamo con $\Omega^1_{\overline{X}}(\log(Y))$ tale $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-modulo.
Definiamo il *fascio delle p-forme differenziali con polo logaritmico in* Y come $\Omega^p_{\overline{X}}(\log(Y)) := \bigwedge^p \Omega^1_{\overline{X}}(\log(Y))$.

Il differenziale di de Rham d_{dR} si restringe alle forme con polo logaritmico in Y, e definisce quindi un complesso di $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-moduli:

$$\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y)) : \mathscr{O}_{\overline{X}} \xrightarrow{\mathrm{d}_{dR}} \Omega^1_{\overline{X}}(\log(Y)) \xrightarrow{\mathrm{d}_{dR}} \Omega^2_{\overline{X}}(\log(Y)) \longrightarrow \ldots$$

Chiamiamo il complesso $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))$ *complesso di de Rham logaritmico di* $\overline{X}$ *lungo* Y.

Il risultato fondamentale di questo elaborato è il seguente:

Teorema 3.3 ([Del71], Sezioni 3.1.7 e 3.1.8, e [PS08], Teorema 4.2)**.** *Nelle ipotesi e notazioni introdotte precedentemente, valgono le seguenti:*

1. $\mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^\bullet\left(\overline{X}, \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))\right)$.
2. *Per ogni k, $\mathrm{H}^k(X, \mathbb{C})$ ammette una struttura di Hodge mista.*

Dimostrazione: Dimostriamo il primo asserto. Ogni punto x di $\overline{X}$ ammette un intorno V_x di Stein tale che $U_x := X \cap V_x$ sia anch'esso Stein. In particolare, per ogni fascio coerente $\mathscr{F}$ su U_x e denotando l'inclusione con $j \colon U_x \longrightarrow$

V_x l'inclusione ovvia, si ha che $\mathbb{R}^i j_* \mathscr{F} \cong 0$ per ogni $i > 0$. Infatti, nella corrispondenza GAGA ([Ser56]), le varietà di Stein corrispondono alle varietà affini, e dal criterio per l'affinità di Serre ([GD67, II, Teorema 5.2.1 (d') e IV (1.7.17)].
In particolare, $\Omega^\bullet_X$ è una risoluzione aciclica (per il funtore $j_*\colon \mathscr{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow \mathscr{O}_{\overline{X}}\text{-Mod}$) del fascio costante $\mathbb{C}$ su X. Perciò abbiamo i seguenti isomorfismi di (iper)coomologia:

$$\mathrm{H}^\bullet(X,\, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^\bullet(X,\, \Omega^\bullet_X) \xleftarrow{\cong} \mathbb{H}^\bullet\left(\overline{X},\, j_*\Omega^\bullet_X\right)$$

A questo punto, la prima parte dell'enunciato segue dal fatto che l'inclusione naturale:

$$\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y)) \hookrightarrow j_*\Omega^\bullet_X$$

è un quasi-isomorfismo. Questo segue dalla combinazione dei risultati [Del70, II, 3.12 e 6.9], dove si utilizza in maniera critica la corrispondenza GAGA per computare analiticamente e direttamente il quasi-isomorfismo dei due complessi filtrati.

Rimane da provare l'esistenza della struttura di Hodge mista su $\mathrm{H}^k(X,\, \mathbb{C})$. Poniamo una filtrazione razionale $W_\bullet$ su $\Omega^p_{\overline{X}}(\log(Y))$ definita nel modo seguente:

$$W_m\left(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))\right) := \begin{cases} 0 & \text{se } m < 0 \\ \Omega^p_{\overline{X}}(\log(Y)) & \text{se } m \geq p \\ \Omega^{p-m}_{\overline{X}} \wedge \Omega^m_{\overline{X}}(\log(Y)) & \text{se } 0 \leq m \leq p \end{cases}$$

Questa filtrazione definisce in coomologia un'altra filtrazione $W_\bullet$:

$$W_m\left(\mathrm{H}^k(X,\, \mathbb{C})\right) = \mathrm{Im}\left(\mathbb{H}^k\left(\overline{X},\, W_{m-k}\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))\right) \longrightarrow \mathrm{H}^k(X,\, \mathbb{C})\right)$$

definita essenzialmente per trasporto tramite l'isomorfismo in ipercoomologia. Inoltre abbiamo la filtrazione banale $F^\bullet$ su $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))$, definita semplicemente come:

$$F^p\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y)) : 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^p_{\overline{X}}(\log(Y)) \longrightarrow \Omega^{p+1}_{\overline{X}}(\log(Y)) \longrightarrow \dots$$

che non è altri che la filtrazione $\sigma^{\geq p}\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))$ definita per troncamento ingenuo del complesso $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))$. Anche questa definisce per trasporto tramite l'isomorfismo di coomologia una filtrazione:

$$F^p\left(\mathrm{H}^k(X,\, \mathbb{C})\right) = \mathrm{Im}\left(\mathbb{H}^k\left(\overline{X},\, F^p\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y))\right) \longrightarrow \mathrm{H}^k(X,\, \mathbb{C})\right)$$

Questo fatto segue dal calcolo esplicito del quasi-isomorfismo di complessi *filtrati* tra $\left(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y)),\, \tau_\bullet\right)$ e $\left(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y)),\, W_\bullet\right)$, dove $\tau_\bullet$ è la filtrazione definita per troncamento intelligente:

$$\tau_{\leq n}\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log(Y)) :\ \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}_{\overline{X}}(\log(Y)) \longrightarrow \ker(\mathrm{d}^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

La dimostrazione nel dettaglio del fatto che il dato di $\left(\mathrm{H}^k(X, \mathbb{C}), W_\bullet, F^\bullet\right)$ soddisfa quindi gli assiomi di struttura di Hodge mista secondo la Definizione 2.2 si può trovare in [Del70, II, 6.2] e in [PS08, Sezione 4.3 e Proposizione 4.11].

□

Questo risultato mostra la struttura di Hodge mista che la coomologia complessa di una varietà liscia ma non propria possiede in maniera naturale. Tale struttura dipende solo da X e non dalla sua compattificazione (cfr. [PS08, Proposizione 4.18]).

Riferimenti bibliografici

[Del70] Pierre Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, pp. iii+133.

[Del71] Pierre Deligne. «Théorie de Hodge. II». In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 40 (1971), pp. 5–57. ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1971__40__5_0.

[Del74] Pierre Deligne. «Théorie de Hodge. III». In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 44 (1974), pp. 5–77. ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1971__40__5_0.

[GD67] Alexander Grothendieck e Jean-Alexandre-Eugène Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique*. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, and 32. Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1960-1967.

[PS08] Chris A. M. Peters e Joseph H. M. Steenbrink. *Mixed Hodge structures*. Vol. 52. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. xiv+470. ISBN: 978-3-540-77015-2.

[Ser56] Jean-Pierre Serre. «Géométrie algébrique et géométrie analytique». In: *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1955–1956), pp. 1–42. ISSN: 0373-0956. URL: http://aif.cedram.org/item?id=AIF_1955__6__1_0.

[Wei58] André Weil. *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VI. Actualités Sci. Ind. no. 1267. Hermann, Paris, 1958, p. 175.